第 3 节 比较指、对数的大小：估算（★★★）

强化训练

1.（2022・重庆模拟・★★）$a=\log_3\frac{1}{2}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=3^{-0.1}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c>b>a$　　（B）$c>a>b$　　（C）$a>c>b$　　（D）$a>b>c$

答案：B

解析：显然 $a<0$，$b<0$，$c>0$，所以 c 最大，

要比较 a 和 b，可以看看它们与常用数据 -1 的大小，若不行就再进行更精确的估计，

$a=\log_3\frac{1}{2}=-\log_3 2$，因为 $0<\log_3 2<1$，所以 $-1<a<0$；

$b=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3$，因为 $\log_2 3>1$，所以 $b<-1$，故 $c>a>b$.

2.（2023・全国模拟・★★）已知 $a=3^{-2}$，$b=2^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_2 5$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

答案：A

解析：观察发现 a，b，c 均为正数，故可再看它们与 1，2 的大小，

因为 $0<3^{-2}<3^0=1$，所以 $0<a<1$，因为 $2^0<2^{\frac{1}{3}}<2^1$，所以 $1<b<2$，

因为 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$，所以 $2<c<3$，故 $a<b<c$.

3.（2022・安徽模拟・★★★）已知 $a=\log_3 4$，$b=\log_5 9$，$c=\frac{4}{3}$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

答案：D

解析：题干专门给了个 $c=\frac{4}{3}$，可能是中间量的提示，我们就把 a 和 b 跟 c 比较一下，看能不能选出答案，

因为 $c=\frac{4}{3}=\log_3 3^{\frac{4}{3}}$，所以要比较 a 和 c 的大小，只需比较 4 和 $3^{\frac{4}{3}}$ 的大小，可将它们同时立方，

因为 $4^3=64<(3^{\frac{4}{3}})^3=3^4=81$，所以 $4<3^{\frac{4}{3}}$，从而 $\log_3 4<\log_3 3^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$，故 $a<c$；

又 $\frac{4}{3}=\log_5 5^{\frac{4}{3}}$，所以要比较 b 和 c 的大小，只需比较 9 和 $5^{\frac{4}{3}}$ 的大小，

因为 $9^3=729>(5^{\frac{4}{3}})^3=5^4=625$，所以 $9>5^{\frac{4}{3}}$，从而 $\log_5 9>\log_5 5^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$，故 $b>c$，所以 $a<c<b$.

4.（2022・焦作三模・★★★）若 $a^3=2$，$2^b=6$，$3^c=8$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a<c<b$　　（B）$c<a<b$　　（C）$a<b<c$　　（D）$b<a<c$

答案：A

解析：因为要比较 a，b，c 的大小，所以先把它们解出来，并粗略估算范围，

由题意，$1<a=\sqrt[3]{2}<2$，$b=\log_2 6>2$，$1<c=\log_3 8<2$，所以 b 最大，

因为 a，c 都在 1 和 2 之间，所以要比较 a 和 c 的大小，可以试试以 $\frac{3}{2}$ 作为中间量，

考虑到 $a=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$，为了将指数整数化，将其立方并与 $(\frac{3}{2})^3$ 比较，因为 $(\frac{3}{2})^3=\frac{27}{8}>a^3=2$，所以 $a<\frac{3}{2}$，

又 $c=\log_3 8>\log_3(3\sqrt{3})=\frac{3}{2}$，所以 $a<c$，故 $a<c<b$.

5．（2022・南昌模拟・★★★）已知偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，若 $a=f(\log_2\frac{1}{5})$，$b=f(\log_3 18)$，$c=f(2^{0.8})$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$b<a<c$　　（C）$c<b<a$　　（D）$c<a<b$

答案：D

解析：先利用 $f(x)$ 为偶函数把自变量全部化到 $(0,+\infty)$ 这个增区间上来，

$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow a=f(\log_2\frac{1}{5})=f(\log_2 5)$，

所以要比较 a，b，c 的大小，只需比较 $\log_2 5$，$\log_3 18$，$2^{0.8}$ 的大小，

显然 $2^{0.8}<2$，$2<\log_2 5<3$，$2<\log_3 18<3$，所以 $2^{0.8}$ 最小，

而要比较 $\log_2 5$ 和 $\log_3 18$，又可以选择 2.5 作为中间量来试试，把 2.5 化成跟比较对象同底的对数来看，

因为 $2.5=\log_2 2^{2.5}=\log_2(4\sqrt{2})$，而 $5<4\sqrt{2}$，所以 $\log_2 5<\log_2(4\sqrt{2})=2.5$，

又 $2.5=\log_3 3^{2.5}=\log_3(9\sqrt{3})$，且 $18>9\sqrt{3}$，所以 $\log_3 18>\log_3(9\sqrt{3})=2.5$，从而 $\log_2 5<\log_3 18$，

故 $2^{0.8}<\log_2 5<\log_3 18$，所以 $f(2^{0.8})<f(\log_2 5)<f(\log_3 18)$，故 $c<a<b$.

6．（★★★）已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 4$，$c=\log_4 5$，则实数 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$a>b>c$　　（C）$b>a>c$　　（D）$b>c>a$

答案：B

解析：先粗略估算，发现 a，b，c 都在 $(1,2)$ 上，故考虑再和中间值 $\frac{3}{2}$ 比较，

$a=\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}$，$b=\log_3 4<\log_3 3\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，$c=\log_4 5<\log_4 4\sqrt{4}=\frac{3}{2}$，所以 a 最大，

再比较 b 和 c，这两个数值比较接近，不再用中间量了，可作差化同底来看，

$b-c=\log_3 4-\log_4 5=\frac{\lg 4}{\lg 3}-\frac{\lg 5}{\lg 4}=\frac{\lg^2 4-\lg 3\lg 5}{\lg 3\lg 4}$　①，

这里 $\lg 3\lg 5$ 没有公式可计算，但 $\lg 3+\lg 5$ 有，可用不等式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$ 来变乘为加，

因为 $\lg 3\lg 5<(\frac{\lg 3+\lg 5}{2})^2=(\frac{\lg 15}{2})^2=\lg^2\sqrt{15}<\lg^2 4$，所以 $\lg^2 4-\lg 3\lg 5>0$，

结合①可得$b-c>0$，所以$b>c$，故$a>b>c$.